Кравцов Г.А., директор ООО «НВФ «БКП-Консалтинг», г.Киев.

Уравнение Риккати. Теория и теорема Письменного-Прохоровой-Куржеевского.

Общеизвестно, что дифференциальное уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{1}$$

вообще говоря, не интегрируется в квадратурах (т.е. нахождение его решения не может быть сведено к конечному числу последовательных интегрирований).

Однако, известно, что при известном частном решении y_1 введением новой переменной $z: y = y_1 + \frac{1}{z}$ уравнение (1) легко сводиться к линейному дифференциальному уравнению.

Пример 1: решим уравнение Риккати $y' = y^2 - (2x+1)y + (x^2 + x + 1)$.

Частным решением является функция $y_1 = x$. Проследим ход решения:

$$y = x + \frac{1}{z},\ y' = 1 - \frac{z'}{z^2},$$

$$1 - \frac{z'}{z^2} = (x + \frac{1}{z})^2 - (2x+1)(x + \frac{1}{z}) + (x^2 + x + 1),$$

$$1 - \frac{z'}{z^2} = x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} - 2x^2 - \frac{2x}{z} - x - \frac{1}{z} + x^2 + x + 1,$$

$z' = z - 1$, общее решение $z = Ce^x + 1$.

Итак, уравнение имеет общее решение $y = x + \frac{1}{Ce^x + 1}$.

Для удобства дальнейших рассуждений перепишем (1) в виде

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

Предположение 1: Предположим, что функции $P(x), Q(x), R(x)$ являются полиномами степеней p, q, r соответственно, что позволяет формально уравнение подать в виде

$$y' + P^p y^2 + Q^q y + R^r = 0, \tag{2}$$

где $P = P(x), Q = Q(x), R = R(x)$.

Предположим, что частное решение уравнения так же является полиномом, тогда возникает задача определения его степени.

Пусть степень полинома k, тогда запишем формальное выражение для вида (2):

$$Y^{k-1} + P^p Y^{2k} + Q^q Y^k + R^r = 0. \tag{3}$$

Для выражения (3) необходимо рассматривать следующие условия:

Условие 1: Если $r > p \geq q$, то степень k полинома, являющегося частным решением (1), необходимо искать по формуле $k = \dfrac{r-p}{2}$;

Условие 2: Если $r > q > p$, то степень k полинома, являющегося частным решением (1), необходимо искать из системы $\begin{cases} p < q < r \\ p + 2k < q + k \\ q + k = r \end{cases}$ и системы $\begin{cases} p < q < r \\ p + 2k > q + k \\ p + 2k = r \end{cases}$.

Систему $\begin{cases} p < q < r \\ p + 2k < q + k \\ q + k = r \end{cases}$ можно привести к виду $\begin{cases} p < q < r \\ p + 2k < r \end{cases}$. Максимальным значением для $p + 2k$ является $r - 1$. Можно составить выражение $\begin{cases} p < q < r \\ p + 2k = r - 1 \end{cases}$, из которого получим решение $k = \dfrac{r-p-1}{2}$. Этой формулой можно пользоваться, если $r < 2q - p$.

Систему $\begin{cases} p < q < r \\ p + 2k \geq q + k \\ p + 2k = r \end{cases}$ можно привести к виду $\begin{cases} p < q < r \\ q + k \leq r \end{cases}$, а затем, решив $\begin{cases} p < q < r \\ q + k = r \end{cases}$, получим $k = r - q$. Произведем проверку: $p + 2(r - q) \geq q + r - q$, $r \geq 2q - p$.

Теорема (Письменного-Прохоровой-Куржеевского): *Для уравнения Риккати (2) в полиномах степеней* p, q, r, *таких что* $r > p, r > q$, *степень* k *полинома, который может быть частным решением (2), определяется по формулам:*

а) $k = \dfrac{r-p}{2}$, *если* $p \geq q$;

б) $k = \dfrac{r-p-1}{2}$, *если* $q > p$ *и* $r < 2q - p$;

в) $k = r - q$, *если* $q > p$ *и* $r \geq 2q - p$.

Если в случае а) и б) числитель не делиться на знаменатель нацело, то частное решение в полиномах найдено быть не может.

Приведем пример нахождения частного решения для уравнения, приведенного в примере выше $y' = y^2 - (2x+1)y + (x^2 + x + 1)$.

Соответственно, $P^p = -1, Q^q = 2x+1, R^r = x^2 + x + 1$, где $p = 0, q = 1, r = 2$.

Так, как $q > p$, то вычисляем $2q - p = 2 \cdot 1 - 0 = 2 = r$. Следовательно, нужно воспользоваться формулой $k = r - q = 2 - 1 = 1$. Частное решение необходимо искать в виде $y_1 = Ax + B$. Подставим $Ax + B$ в уравнение и выполним действия:

$$(Ax+B)' = (Ax+B)^2 - (2x+1)(Ax+B) + (x^2 + x + 1),$$

$$A = A^2x^2 + 2ABx + B^2 - 2Ax^2 - 2Bx - Ax - B + x^2 + x + 1.$$

Перенесем члены с неизвестными коэффициентами в правую часть, остальные члены – в левую и приведем подобные $(-A^2 + 2A)x^2 + (-2AB + 2B + A)x + (A + B^2 - B) = x^2 + x + 1$.

Теперь, легко составив систему $\begin{cases} -A^2 + 2A = 1 \\ -2AB + 2B + A = 1 \\ A + B^2 - B = 1 \end{cases}$, получим следующее решение $A = 1, B = 0$. Из чего следует, что частным решением уравнения является $y_1 = x$.

Пример 2: Найдем частное решение для уравнения $\frac{dy}{dx} = (x^6 - 1)y^2 + (x^6 - x^5 + 1)y + x^8$.

В данном уравнении степени полиномов принимают соответственно значения $p = 6, q = 6, r = 8$. Так, как $p \geq q$, то $k = \frac{r-p}{2} = \frac{8-6}{2} = 1$. Частное решение необходимо искать в виде $y_1 = Ax + B$. Подставим $Ax + B$ в уравнение и выполним действия:

$(Ax+B)' = (Ax+B)^2(x^6 - 1) - (x^6 - x^5 + 1)(Ax+B) + (x^8)$, неопределенные коэффициенты найдены быть не могут, что подтверждает смысл фразы «полином, который может быть частным решением».

Пример 3: Найдем частное решение для уравнения $\frac{dy}{dx} = y^2 + (x^2 + 9)y + 3x^3 - 16x^2 + 69x - 115$.

В данном уравнении степени полиномов принимают соответственно значения $p = 0, q = 2, r = 3$. Так, как $q > p$ и $r < 2q - p$, то степень полинома определим из выражения $k = \frac{r-p-1}{2} = 1$. Частное решение необходимо искать в виде $y_1 = Ax + B$.

Подставив $Ax+B$ в уравнение $(Ax+B)'=(Ax+B)^2+(x^2+9)(Ax+B)+(3x^3-16x^2+69x-115)$ и выполнив действия, получим систему, решив которую, определим коэффициенты $A=-3, B=7$. Таким образом, частное решение примет вид $y_1=-3x+7$.

Данной статьей автор высказывает слова глубочайшего уважения и благодарности всем математикам-педагогам, отдавших часть своей души автору при изучении самой великой из наук. Особенную благодарность хочется высказать Письменному Дмитрию Трофимовичу, Прохоровой Алле Васильевне и Куржеевскому Игорю Владимировичу – лучшим педагогам-математикам Севастопольского военно-морского института им.П.С.Нахимова.

Если суждено изложенной теореме быть признанной, то в знак благодарности автор сочтет за честь именовать ее именем своих Учителей – **Теорема Письменного-Прохоровой-Куржеевского**.